UNIVERSITE DE NANCY II

I. C. N.

Concours 1983

Durée : 4 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Régime Normal

1er problème :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les fonctions f_n et g_n définies par

$$f_n(x) = \frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin n t}{1+(x-t)^2}\,dt \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\cos n t}{1+(x-t)^2}\,dt$$

I. 1 - a) Donner les ensembles de définition de f_n et g_n

b) Démontrer que pour tout x réel $f_n(x) < \frac{n}{2\pi}\int_{x-\frac{\pi}{n}}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$

En déduire les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$

Déterminer de même les limites de g_n en $+\infty$ et en $-\infty$

2 - a) En écrivant $g_n(x) = \frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\cos n t}{1+(x-t)^2}\,dt + \frac{n}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{\cos n t}{1+(x-t)^2}\,dt$

Démontrer qu'il existe une fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$, de signe constant telle que pour x réel $g_n(x) = \left(2x - \frac{\pi}{n}\right) h_n(x)$

b) En déduire le signe de $g_n(x)$

3 - Effectuer le changement de variable $u = x - t$ dans $f_n(x)$ et dans $g_n(x)$

En déduire le calcul de la dérivée f'_n de f_n. Montrer que f'_n s'exprime simplement en fonction de g_n.

4 - Etudier le sens de variation de f_n et construire sommairement sa représentation graphique.

II .1 - En reprenant le changement de variable $u = x - t$ dans $g_n(x)$, en déduire le calcul de la dérivée g'_n de g_n. Démontrer que pour tout x réel

$$f_n(x) = -\frac{1}{n}\,g'_n(x) + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x-\frac{\pi}{n})^2}\right]$$

2 - a) Démontrer que pour tout x réel $\left|\frac{g_n(x)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2n}$

b) En utilisant les résultats antérieurs, démontrer que les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt, \quad J_n = \int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,dt, \quad \text{et} \quad K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

sont convergentes ; donner leurs valeurs en fonction de $g_n(0)$

c) Démontrer que f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X_n.

3 - Soit F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire X_n.

a) Déterminer $F_n(x)$

b) Démontrer que les variables aléatoires X_n convergent en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la densité de probabilité.

2ème problème :

On donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension n, $n \geqslant 3$ et une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ de E. Pour $k = 1, 2, \ldots, n$ on pose $\vec{f}_k = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i\right) - \vec{e}_k$

1 - a) Calculer le déterminant D_n de la famille $B_1 = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$ dans la base B. En déduire que B_1 est une base de E puis donner la matrice de passage P de la base B à la base B_1.

b) Pour $k = 1, 2, \ldots, n$ déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{e}_k$ dans la base B_1. En déduire la matrice P^{-1}.

2 - Soit u un endomorphisme de E admettant les vecteurs $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ pour vecteurs propres avec des valeurs propres réelles respectives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $u \circ v = v \circ u$

a) Soit $L = \{ (i, j) \in (1, 2, \ldots, n)^2 \ ; \ \lambda_i = \lambda_j \}$

Déterminer l'expression générale des matrices $V = (a_{ij})$ des endomorphismes v de $\mathcal{M}$ exprimées dans la base B_1 ; on précisera a_{ij} suivant que (i,j) appartient ou non à L.

b) On prend dans cette question $n = 3$

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Démontrer que A est la matrice dans la base B d'un endomorphisme u admettant $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ pour vecteurs propres.

Utiliser les résultats précédents pour déterminer l'expression générale des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels qui commutent avec A.